ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES
ECOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE, DE TECHNIQUES AVANCÉES
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS, DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE
DE LA MÉTALLURGIE ET DE L'INDUSTRIE DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (OPTION T.A.)

*
**

CONCOURS D'ADMISSION 1983

***

MATHEMATIQUES

2ème ÉPREUVE

OPTION T.A.

(Durée 4 heures)

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : MATHEMATIQUES II - T.A.

Dans tout le problème, a désigne un réel de l'intervalle $]0, \pi[$.

PARTIE I

Soient f et g les deux applications définies sur $]-a, +a[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, par :

$$\forall x \in]-a, a[\qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2(\cos x - \cos a)}} \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

1°) Etudier les variations de f. Tracer la représentation graphique de f en précisant les symétries éventuelles.

2°) a - Pour tout x de l'intervalle $[0, a]$, comparer x, sin x, $\frac{\sin a}{a}.x$ (on pourra étudier les variations de fonctions auxiliaires).

b - Démontrer que :

$$\forall x \in]-a, +a[\qquad \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \leqslant f(x) \leqslant \frac{a}{\sin a} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

En déduire, pour tout x de $[0, a[$, un encadrement de g(x) à l'aide de $\text{Arcsin}\frac{x}{a}$ et de $\frac{a}{\sin a} \cdot \text{Arcsin}\frac{x}{a}$.

3°) a - Démontrer que l'intégrale $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{2(\cos x - \cos a)}}$ converge, en utilisant :

- l'encadrement obtenu au 2°) b
- un équivalent de f(x) au voisinage du point a.

On posera désormais $g(a) = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{2(\cos x - \cos a)}}$; $g(-a) = -g(a)$.

b - Comparer g(a), $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{a}{\sin a} \cdot \frac{\pi}{2}$;

c - Déterminer les variations de l'application g. (On donnera avec précision les théorèmes utilisés). Quelle est la parité de g ?

Que peut-on dire de g(a) quand a tend vers 0 par valeurs supérieures ?

.../

4°) a - Démontrer que le rapport $\frac{x - a}{g(x) - g(a)}$ possède une limite finie, à préciser, lorsque x tend vers a par valeurs inférieures. Que peut-on en conclure pour la représentation graphique de g ?

b - Soit J l'image par g de l'intervalle [- a, + a].

Déterminer avec précision l'ensemble J. Démontrer que g possède une application réciproque définie sur J.

g^{-1} est-elle continue sur J ? est-elle dérivable sur J ?

Tracer les représentations graphiques de g et g^{-1} sur la même feuille.

PARTIE II

Soit F une fonction réelle, définie sur $\mathbb{R}$, deux fois continûment dérivable vérifiant la propriété (P_a) :

$$(P_a) : \quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad F''(t) + \sin\Big(F(t)\Big) = 0 \quad , \quad F(0) = a \quad , \quad F'(0) = 0.$$

a est le réel défini au début du problème ; soit A l'ensemble :

$$A = \Big\{\alpha \,\Big|\, \alpha > 0 : \forall t \in]0, \alpha], F'(t) < 0\Big\}$$

1°) En utilisant la continuité de F, montrer :

$$\exists\, \alpha_o \qquad \alpha_o > 0 \ : \ \forall t \in]0, \alpha_o], \quad F''(t) < 0$$

En déduire que A n'est pas vide. Montrer que si α_1 appartient à A, l'intervalle $]0, \alpha_1]$ est contenu dans A.

2°) a - Démontrer :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad , \quad F'(t)^2 = 2\,[\cos\Big(F(t)\Big) - \cos a].$$

Soit $\alpha \in A$; montrer : $\forall t \in]0, \alpha] \quad , - a < F(t) < a.$

Préciser le tableau de variations de F sur $]0, \alpha]$.

b - Soit g la fonction, définie dans la première partie et précisée à la question I - 3°) ; vérifier que la fonction $t \longrightarrow g\,[F(t)]$ est définie et continue sur $[0, \alpha]$, $(\alpha \in A)$. Calculer sa dérivée pour $t \in]0, \alpha]$ et en déduire une expression de $g\,[F(t)]$ en fonction de t et de $T = 4\,g(a)$.

3°) Déduire de l'expression de $g\,[F(t)]$ obtenue, que A est un intervalle borné ; soit M sa borne supérieure.

Montrer d'abord $F'(M) \geq 0$ puis $F'(M) = 0$ (On pourra raisonner par l'absurde). Calculer F(M). En déduire la valeur de M.

4°) Montrer :

$$F\Big(\frac{T}{4}\Big) = 0 \quad ; \quad \forall t \in]0, \frac{T}{4}[\ , \ F(t) = - F\Big(\frac{T}{2} - t\Big).$$

5°) En introduisant l'application H définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad H(t) = - F\Big(t + \frac{T}{2}\Big)$$

Etudier la restriction de F à $[\frac{T}{2}, T]$.

6°) Justifier brièvement le résultat suivant : la fonction F est une fonction paire, périodique de période T.